BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** **2009**

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Г.Д.ШУКЮРОВА (ДЖАБРАИЛОВА)

Бакинский Государственный Университет

gulnara550@pochta.ru

В работе рассмотрена смешанная задача для полулинейного псевдогиперболического уравнения четвертого порядка в случае, когда некоторые коэффициенты- достаточно гладкие функции, а некоторые коэффициенты имеют ограниченную вариацию. Вводится определение слабого решения. Доказываются теоремы существования и единственности слабого решения рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи и основные результаты.

Пусть $\Omega \subset R_n$ ограниченная область с достаточно гладкой границей Г. В цилиндре $Q_T = (0,T) \times \Omega$ рассмотрим смешанную задачу для полулинейного псевдогиперболического уравнения четвертого порядка

$$u_{tt} - a(t)\Delta u + b(t)\Delta^2 u = f(t, x, u, u_t), \qquad t > o, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(t, x) = \Delta u(t,x) = 0, \qquad t > 0, \qquad x \in \Gamma, \tag{2}$$

и с начальными условиями

$$u(0, x) = u_0(x) \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ - некоторые функции, определенные на $[0,T]$, а $f(t, x, u, \upsilon)$ определена на $[0,T] \times \Omega \times R^2$.

В случае, когда $a(t)$ и $b(t)$ -достаточно гладкие функции, разрешимость задачи (1)-(3) исследована в работах различных авторов (напр., см. [1], [2], [3]). В случае, когда $a(t) = 0$, а $b(t)$ - функция с ограниченной вариацией, разрешимость задачи (1)-(3) следует из результатов [4], [5].

В данной работе рассматривается случай, когда $a(t) \geq a_0 > 0$ и достаточно гладкая функция, а $b(t) \geq b_0 > 0$ имеет ограниченную вариацию.

Введем некоторые определения и обозначения. Через $\hat{W}_2^m$ обозначим следующее подпространство пространства $W_2^m(\Omega)$:

$$\hat{W}_2^m = \{u : \quad u \in W_2^m(\Omega), \quad \Delta^i u = 0,\ x \in \Omega,\ i = 0,1\ldots,\left(\frac{m}{2}\right),\ \text{где}$$
$$\left(\frac{m}{2}\right) = \ell \ \text{если}\ m = 2\ell + 1,\ \left(\frac{m}{2}\right) = \ell - 1,\ \text{если m} = 2\ell\} \ .$$

Пусть $X \subset Y$ - гильбертовы пространства. Через $W_p^1(a\,,b;X,Y)$ обозначим следующее пространство (см [4]):

$$W_p^1(a,\ b;X,Y) = \{u : u \in L_p \ \ ((a,b);X),\ u' \in L_p(a\,,b;Y)\},\ \text{где} \quad 1 \le p \le \infty\,.$$

Существование решений задачи (1)-(3) будем исследовать при следующих предположениях

1°. $a(t) \in C^1\,[0,T], \qquad a(t) \ge a_0 > 0;$

2°. $b(t) \in BV\,[0,T], \qquad b(t) \ge b_0 > 0;$

3°. Функция $f(t,\,x,\,u,\,\upsilon)$ определена на $[0,T]\times\Omega\times R^2$ и при каждом $t\in[0,T]$ определяет ограниченный оператор, действующий из $\hat{W}_2^2\times\hat{W}_2^1$ в $\hat{W}_2^1$, который удовлетворяет локальному условию Липшица, т.е. при любых $t_1,t_2 \in[0,T]$, $\|u_i\|_{\hat{W}_2^2} \le r$, $\|\upsilon_i\|_{\hat{W}_2^1} \le r$, $r>0$, $i=1{,}2$ выполняется неравенство:

$$\|f(t_2,u_2,\upsilon_2) - f(t_1,u_1,\upsilon_1)\|_{\hat{W}_2^1} \le c(r)\left[|t_2 - t_1| + \|u_2 - u_1\|_{\hat{W}_2^2} + \|\upsilon_2 - \upsilon_1\|_{\hat{W}_2^1}\right],$$

где $c(\cdot)\in C\,(R_+)$;

4°. $F(t,\,u,\,\upsilon)$ является усиленно непрерывной из $\hat{W}_2^1(0,T;\,\hat{W}_2^2,\hat{W}_2^1)$ в $L_1(0,T;\ W^{-2})$, т.е. если $u_\mu \to u$ *-слабо в $L_\infty(0,T;\,\hat{W}_2^2)$, $u'_\mu \to u'$ *-слабо в $L_\infty(0,T;\,\hat{W}_2^1)$, то $f(t,u_\mu,u'_\mu) \to f(t,u,u')$ в $L_1(0,T;\ W^{-2})$, где $W^{-2} = (\hat{W}_2^2)'$;

5°. При любых $u(\cdot)\in W_2^1\ (0,T;\,\hat{W}_2^2,\,\hat{W}_2^1)$ выполнена следующая односторонняя оценка:

$$\int_0^s\int_\Omega f(t,x,u(t,x),u'(t,x))u'(t,x)\,dxdt \le c\left[1 + \int_0^s\left(\|u(t,\cdot)\|^2_{\hat{W}_2^2} + \|u'(t,\cdot)\|^2_{\hat{W}_2^1}\right)dt\right].$$

Определение. Функцию $u \in W_2^1(0,T;\,\hat{W}_2^2,\,\hat{W}_2^1)$ назовём слабым решением задачи (1)-(3), если при любых $\upsilon \in W_2^1(0,T;\,\hat{W}_2^2,\,\hat{W}_2^1)$, $\upsilon(T,x)=0$ выполнено равенство

$$-\int_0^T\int_\Omega u'(t,x)\cdot\upsilon'(t,x)\,dxdt - \int_0^T\int_\Omega a(t)\nabla u'(t,x)\nabla\upsilon'(t,x)\,dxdt +$$
$$+\int_0^T\int_\Omega b(t)\Delta u(t,x)\Delta\upsilon(t,x)\,dxdt - \int_\Omega u_1(x)\,\upsilon(0,x)\,dx - \int_\Omega \nabla u_1(x)\nabla v(0,x)\,dx -$$
$$-\int_0^T\int_\Omega a'(t)\nabla u'(t,x)\nabla\upsilon(t,x)\,dxdt = \int_0^T\int_\Omega f(t,x,u(t,x),u'(t,x))\,\upsilon(t,x)\,dxdt, \qquad (4)$$

а $u(t,x)$ удовлетворяет начальному условию

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$
где « $'$ » означает производную по t.

Доказана следующая теорема о существовании слабого решения задачи (1) - (3).

Теорема 1. Пусть выполнены условия $1^0 - 5^0$. Тогда при любых $u_0 \in \hat{W}_2^2$, $u_1 \in \hat{W}_2^1$ задача (1) - (3) имеет слабое решение
$$u(\cdot) \in W_2^1\left(0,T;\ \hat{W}_2^2,\ \hat{W}_2^1\right).$$
Теорема единственности доказывается при более жестких ограничениях.

Рассмотрим смешанную задачу
$$u_{tt} - a(t)\,\Delta u + b(t)\Delta^2 u = f(t,x,u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \tag{6}$$
с граничными условиями (2) и начальными условиями (3).

Предположим, что $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условиям 1^0, 2^0 и

$1'$. $a'(t)$ дифференцируема и $a''(\cdot) \in L_1(0,T)$.

Нелинейная функция $f(t,x,u)$ удовлетворяет условию:

$3'$. При каждом $t \in [0,T]$ $f(t,x,u)$ определяет ограниченный оператор из $\hat{W}_2^2$ в $\hat{W}_2^1$, который удовлетворяет локальному условию Липшица, т.е. при любых $\|u_i\|_{\hat{W}_2^2} \le r$, $i = 1,2$
$$\|f(t_2,x_2,u_2) - f(t_1,x_1,u_1)\|_{\hat{W}_2^1} \le c(r)\left[|t_2 - t_1| + \|u_2 - u_1\|_{\hat{W}_2^2}\right],\ \text{где } c(\cdot) \in C(R_+).$$
Доказана следующая теорема о единственности слабого решения задачи (6), (2), (3).

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1°, 2°, $1'$ и $3'$. Тогда задача (6), (2), (3) имеет единственное слабое решение $u \in W_\infty^1\left(0,T;\ \hat{W}_2^2,\ \hat{W}_2^1\right)$.

В дальнейшем через $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в $L_2(\Omega)$. Абстрактные функции $t \to u(t,x,)$ со значениями в $L_2(\Omega)$ или в $\hat{W}_2^i$, $i = 1,2$ будем обозначать через $u(t)$.

Доказательство теоремы существования слабого решения.

Сначала рассмотрим случай, когда $b(t) = b = const$. Заменой $\upsilon_1 = u$, $\upsilon_2 = u'$ задача (1)- (3) сводится к задаче Коши:
$$\begin{cases} w(t) = L(t)\,w(t) + F(t,w(t)), & (7) \\ w(0) = w_0 & (8) \end{cases}$$
в гильбертовом пространстве $\mathrm{H} = \hat{W}_2^2 \times \hat{W}_2^1$, где
$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -b\Delta^2 G(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad D(L(t)) = H_1 = \hat{W}_2^3 \times \hat{W}_2^2$$
$$G(t) = (I - a(t)\Delta)^{-1}, \quad F(t,w(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t,x,\upsilon_1(t,x),\ \upsilon_2(t,x)) \end{pmatrix}.$$

Для задачи (7), (8) выполнены все условия о разрешимости «в целом» (см. [2]). Поэтому при любых $w_0 \in H$ задача (7), (8) имеет единственное решение $w(t) \in C([0,T];H)$. При этом, если $w_0 \in H_1$, то $w(t) \in C([0,T];H_1) \cap C^1([0,T],H)$ и является сильным решением задачи (7), (8).

Легко показать, что если $w_0 \in H$ и $w(t)$ является соответствующим слабым решением задачи (7), (8), то $w(t) = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ u'(t,x) \end{pmatrix}$ и $u(t,x)$ является слабым решением задачи (1) - (3). Поэтому при любых $z(t,x) \in W_2^1\left(0,T;\ \hat{W}_2^2, \hat{W}_2^1\right)$ выполнено равенство:

$$-\int_0^T\int_\Omega u'(t,x)\, z'(t,x)\, dxdt - \int_0^T\int_\Omega a(t)\, \nabla u'(t,x)\, \nabla z'(t,x)\, dxdt +$$
$$+\int_0^T\int_\Omega b(t)\Delta u(t,x)\, \Delta z(t,x)\, dxdt + \int_\Omega u'(T,x) z(t,x) - \int_\Omega u'(0,x) z(0,x) +$$
$$+\int_\Omega \nabla a(T) u_t(T,x)\, \nabla z(T,x)\, dx - \int_\Omega \nabla a(0) u_t(0,x) \nabla z(0,x)\, dx -$$
$$-\int_0^T\int_\Omega a'(t) \nabla u'(t,x)\, \nabla z(t,x)\, dxdt = \int_0^T\int_\Omega f(t,x,u(t,x),u'(t,x)) z(t,x)\, dxdt.$$

Если $w(t_0) = \begin{pmatrix} u(t_0,x) \\ u'(t_0,x) \end{pmatrix} \in H_1$, то $w(t)$ является сильным решением задачи (7), (8) и справедливо следующее тождество

$$\frac{1}{2}\|u'(t,\cdot)\|^2 + \frac{a(t)}{2}\|\nabla u'(t,\cdot)\|^2 + \frac{b}{2}\|\Delta u(t,\cdot)\|^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\|u'(t_0,\cdot)\|^2 + \frac{a(t_0)}{2}\|\nabla u'(t_0,\cdot)\|^2 + \frac{b}{2}\|\Delta u(t_0,x)\|^2 +$$
$$+\int_{t_0}^t\int_\Omega a'(\tau)\cdot \nabla u'(\tau,x)\cdot \nabla u(\tau,x)\, dxd\tau + \int_{t_0}^t\int_\Omega f(\tau,x,u(\tau,x), u'(\tau,x))\, u'(\tau,x)\, dxd\tau\,. \qquad (9)$$

Пусть $w(t_0) = \begin{pmatrix} u(t_0,x) \\ u'(t_0,x) \end{pmatrix} \in H_1$. Аппроксимируя $w(t_0)$ более гладкими элементами и переходя к пределу, получим, что (9) справедливо для слабых решений.

Отрезок $[0,T]$ разобьем на n частей : $0 = t_0 < t_1 < .... < t_n = T$.

Пусть $b_n(t) = b_{nk}, t_k \le t \le t_{k+1}$, $k = 0,1,...,n-1$, где $b_{nk} = \frac{1}{\delta_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} b(\tau)d\tau$, $\delta_n = t_{k+1} - t_k$.

Рассмотрим смешанную задачу

$$u''_{nk} - a(t)\Delta u'' + b_n(t)\Delta^2 u_{nk} = f(t, u_{nk}, u'_{nk}),\ t_k \le t \le t_{k+1},\ \ x \in \Omega \qquad (10)$$

с граничными условиями (2) и с начальными условиями

$$u_{n,k}(t_k,x) = u^0_{nk}(x), \qquad u'_{n,k}(t_k,x) = u'_{nk}(x),\ x \in \Omega, \qquad (11)$$

где $u^0_{n0}(x) = u_0(x), \qquad u'_{n,0}(x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \qquad (12)$

$$u_{n,k}^0(x)=u_{n,k-1}(t_k,x), \qquad u'_{n,k}(x)=u'_{n,k-1}(t_k,x), \ \ x\in\Omega, \quad k=1,2,\dots,n. \tag{13}$$

Решая последовательно задачи (10)- (13), начиная с $k=0$ получаем, что при каждом $k=0,1,\dots,n-1$ задача (10)-(13) имеет единственное решение $u_{nk}(\cdot)\in C\left([t_k,\ t_{k+1}];\ \hat{W}_2^2\right)\cap C^1\left([t_k,t_{k+1}];\hat{W}_2^1\right)$ и для них справедливо энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\|u'_{n,k}(t)\|^2+\frac{a(t)}{2}\|\nabla u'_{n,k}(t)\|^2+\frac{b_{n,k}}{2}\|\Delta u_{n,k}(t)\|^2=$$

$$=\frac{1}{2}\|u'_{n,k}(t_k)\|^2+\frac{a(t_k)}{2}\|\nabla u'_{n,k}(t_k)\|^2+\frac{b_{n,k}}{2}\|\Delta u_{n,k}(t_k)\|^2+$$

$$+\int_{t_k}^{t}\int_{\Omega}a'(\tau)\,\nabla u'_{n,k}(\tau,x)\cdot\nabla u_{n,k}(\tau,x)\,dxd\tau+$$

$$+\int_{t_k}^{t}\int_{\Omega}f\left(\tau,u_{n,k}(\tau,x),\nabla u'_{n,k}(\tau,x)\right)\,u'_{n,k}(\tau,x)dxd\tau,\ \ t_k\le t\le t_{k+1} \tag{14}$$

$k=0,1,\dots,\ n-1$.

Рассмотрим последовательность $u_n(t),\ 0\le t\le T$, где $u_n(t)=u_{n,k}(t)$ при $t_k\le t\le t_{k+1}$, $k=0,1,\dots,\ n$.

Учитывая это, из (14) получаем, что при $t_k\le t\le t_{k+1}$

$$\frac{1}{2}\|u'_n(t)\|^2+\frac{a(t)}{2}\|\nabla u'_n(t)\|^2+\frac{b_{n,k}}{2}\|\Delta u(t)\|^2=$$

$$=\frac{1}{2}\|u'_{n,k-1}(t_k)\|^2+\frac{a(t_k)}{2}\|\nabla u'_{n,k-1}(t_k)\|^2+\frac{b_{n,k}}{2}\|\Delta u_{n,k-1}(t_k)\|^2+R_{n,k}(t), \tag{15}$$

где $R_{n,k}(t)=\int_{t_k}^{t}\int_{\Omega}a'(\tau)\nabla u'_n(\tau,x)\nabla u_n(\tau,x)\,dxd\tau+$

$$+\int_{t_k}^{t}\int_{\Omega}f(\tau,u_n(\tau,x),\,u'_n(\tau,x))u'_n(\tau,x)\,dxd\tau. \tag{16}$$

Из (15), используя (14), получаем, что

$$\frac{1}{2}\|u'_n(t)\|^2+\frac{a(t)}{2}\|\nabla u'_n(t)\|^2+\frac{b_{n,k}}{2}\|\Delta u_n(t)\|^2\le$$

$$\le\frac{1}{2}\|u_0(x)\|^2+\frac{a(0)}{2}\|\nabla u_1(x)\|^2+\frac{b_{n,0}}{2}\|\Delta u_0(x)\|^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(b_{n,j}-b_{n,j-1}\right)\cdot\left\|\Delta u_{n,j-1}(t,\cdot)\right\|^2+R_{n,0}(t)\ .$$

Используя неравенство Гельдера и Коши, отсюда выводится неравенство

$$\frac{1}{2}\|u_n'(t)\|^2+\frac{a_0}{2}\|\nabla u_n'(t)\|^2+\frac{b_0}{2}\|\Delta u_n(\tau)\|^2\le$$

$$\le\frac{1}{2}\|u_0(x)\|^2+\frac{a(0)}{2}\|\nabla u_1(x)\|^2+\frac{M_b}{2}\|\Delta u_0(x)\|^2+c_1+c_2\int_0^t\left(c_0+a'(\tau)\right)\times$$

$$\times\left[\|\nabla u_n'(\tau,x)\|^2+\|\Delta u_n(\tau,x)\|^2\right]d\tau+\sum_{j=1}^{k}\left(b_{n,j}-b_{n,j-1}\right)\|\Delta u_{n,j-1}(t_j)\|^2, \tag{17}$$

где $M_b=\max\limits_{0\le t\le T}b(t),\ c_1>0,\ c_2>0$ не зависят от n.

Применяя лемму Гронуолла, из (17) получаем, что

$$\frac{1}{2}\|u_n'(t)\|^2+\|\nabla u_n'(t)\|^2+\frac{b_0}{2}\|\Delta u_n(t)\|^2\le$$

$$\le\left[\frac{1}{2}\|u_1(x)\|^2+\frac{a(0)}{2}\|\nabla u_1(x)\|^2+\frac{M_b}{2}\|\Delta u_0(x)\|^2+\right.$$

$$\left.+c_1+\sum_{j-1}^{k}\left|b_{n,j}-b_{n,j-1}\right|\|\Delta u_{n,j-1}(t_j)\|^2\right]\times\exp\left[c_2c_0T+c_2\int_0^t a'(\tau)d\tau\right]. \tag{18}$$

С другой стороны,

$$\sum_{j-1}^{k}\left|b_{n,j}-b_{n,j-1}\right|\cdot\|\Delta u_{n,j}(\tau)\|^2\le\int_{[0,t[}\|\Delta u_n(\tau)\|^2dV_b[0,t]. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что

$$\frac{1}{2}\|u_n'(t)\|^2+\frac{a(0)}{2}\|\nabla u_n'(t)\|^2+\frac{b_0}{2}\|\Delta u_n(t)\|^2\le$$

$$\le c_3\left[\frac{1}{2}\|u_1(x)\|^2+\frac{a_{(0)}}{2}\|\nabla u_1(x)\|^2+\frac{M_b}{2}\|\Delta u_0(x)\|^2\right]\times\exp(c_3V_b[0,T]), \tag{20}$$

где $c_3=\exp\left[c_2c_0T+c_2\int_0^t a'(\tau)d\tau\right]$.

Таким образом, для последовательности $\{u_n(t,\cdot)\}$ имеет место априорная оценка (20).

Тогда ввиду *-слабой компактности ограниченного множества в $L_\infty(0,T;X)$, где X- гильбертово пространство, получим, что из последовательности $\{u_n(t,\cdot)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_\mu}(t,\cdot)\}$ со следующими свойствами (см. [6]):

$$u_{n_\mu}\to u\qquad *-\text{слабо в}\quad L_\infty\left(0,T;\ \hat{W}_2^2\right), \tag{21}$$

$$u_{n_\mu}\to u'\qquad *-\text{слабо в}\quad L_\infty\left(0,T;\ \hat{W}_2^1\right). \tag{22}$$

Пусть $\upsilon(\cdot)\in W_2^1\left(0,T;\ \hat{W}_2^2,\ \hat{W}_2^1\right)$ и $\upsilon(T,x)=0$. Тогда, используя (10)-(13), получим, что

$$-\int_0^T\int_\Omega u_n'(t,x)\cdot \upsilon'(t,x)dxdt-\int_0^T\int_\Omega a(t)\,\nabla u_n'(t,x)\,\nabla \upsilon'(t,x)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_\Omega b_n(t)\Delta u_n(t,x)\cdot\Delta\upsilon(t,x)dxdt-\int_0^T\int_\Omega a'(t)\,\nabla u_n'(t,x)\nabla\upsilon(t,x)dxdt-$$
$$-\int_0^T\int_\Omega f(t,x,u_n(t,x),u_n'(t,x))\,\upsilon(t,x)dxdt=$$
$$=\int_\Omega u_n'(0;x)\cdot\upsilon(0,\,x)dx-\int_\Omega a(0)\nabla u_n'(0,x)\cdot\nabla\upsilon(0,x)dx=$$
$$=-\int_\Omega u_1(x)\,\upsilon(0,\,x)-\int_\Omega a(0)\nabla u_1(\,x)\cdot\nabla\upsilon(0,x)dx\,. \qquad (23)$$

С другой стороны,
$$u_n(0,x)=u_{n,0}(x)=u_0(x),\qquad x\in\Omega\quad . \qquad (24)$$

Написав (23) для $n=n_\mu$, переходим к пределу при $n_\mu\to+\infty$. Тогда, учитывая (21) – (24), получим, что $u(\cdot)\in W^2\left(0,T;\,\hat{W}_2^2;\,\hat{W}_2^1\right)$ является слабым решением задачи (1) - (3).

Доказательство теоремы 2. Пусть функции $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ являются слабыми решениями задачи (1) – (3). Тогда $w=u_1-u_2\in W_2^1\left(0,T;\,\hat{W}_2^2,W_2^1\right)$ и для w выполнено равенство:
$$-\int_0^T\int_\Omega w'(\tau,x)\cdot\theta'(\tau,x)dxdt-\int_0^T\int_\Omega a(\tau)\,\nabla w'(\tau,x)\cdot\nabla\theta'(\tau,x)dxd\tau+$$
$$+\int_0^T\int_\Omega b(\tau)\Delta w(\tau,x)\cdot\Delta\theta(\tau,x)dxd\tau-\int_0^T\int_\Omega a'(\tau)\nabla w'(\tau,x)\cdot\nabla\theta(\tau,x)dxd\tau=$$
$$=\int_0^T\int_\Omega\left[f(\tau,x,\,u_1(\tau,x))-f(\tau,x,u_2(\tau,x))\right]\;\theta(\tau,x)dxd\tau, \qquad (25)$$
где $\quad\theta\in W_2^1\left(0,T;\,\hat{W}_2^2,W_2^1\right),\ \theta(x,T)=0.$

Следуя [4], рассмотрим следующую функцию:
$$\theta(t,x)=\begin{cases}-\int_t^s w(\tau,x)d\tau\quad, & t<s,\\ 0\quad, & t\geq s.\end{cases}$$

Очевидно, что $\theta(\cdot)\in W_2^1\left(0,T;\,\hat{W}_2^2,W_2^1\right)$, и если $t\leq s$, то
$$\theta(t,\,x)=w_1(t,x)-w_1(s,x)\text{, где } w_1(t,\,x)=\int_0^t w(\tau,x)d\tau\,.$$

Поставив $\theta(t,x)$ в (26), получим следующее равенство:
$$-\int_0^s\int_\Omega w'(\tau,x)\cdot w(\tau,x)dxdt-\int_0^T\int_\Omega a(\tau)\,\nabla w'(\tau,x)\cdot\nabla w(\tau,x)dxd\tau+$$
$$+\int_0^s\int_\Omega b(\tau)\Delta w(\tau,x)(\Delta w_1(\tau,x)-\Delta w_1(s,x))\,dxd\tau-$$

$$-\int_0^s\int_\Omega a'(\tau)\nabla w'(\tau,x)\ \ (\nabla w_1(\tau,x)-\nabla w_1(s,x))\,dxd\tau=$$

$$=\int_0^s\int_\Omega [F(\tau,u_1(\tau,x)-F\ (\tau,u_2(\tau,x))]\,(w_1(\tau,x)-w_1(s,x))\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям и применяя неравенства Гельдера и Юнга, отсюда имеем следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |w(s,x)|^2\,dx+\frac{a_0}{2}\int_\Omega |\nabla w(s,x)|^2\,dx+\frac{b_0}{2}\int_\Omega |\Delta w_1(s,x)|^2\,dx\le$$

$$\le\varepsilon\|\Delta w_1(s)\|^2\cdot\int_0^T dV_b[0,t]+cc_0\varepsilon\|\Delta w_1(s)\|^2+$$

$$+c\int_0^s\|\nabla w(t)\|^2ds+c_\varepsilon\int_0^s\|\Delta w_1(s)\|^2\,dV_b[0,t]+\ \ +\varepsilon\int_0^T a''(t)dt\cdot\|\Delta w_1(s)\|^2. \qquad (26)$$

Выбирая ε достаточно малым, из (27) получим, что

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|^2+\frac{a_0}{2}\|\nabla w(s)\|^2+b_1\|\Delta w_1(s,x)\|^2\le$$

$$\le c\cdot\int_0^s\|\nabla w(t)\|^2+\int_0^s|a''(t)|\|\Delta w_1(t)\|dt+c_2\int_0^s\|\Delta w_1(s)\|^2\,dV_b[0,t]. \qquad (27)$$

Отсюда, применяя неравенство Гельдера, получим, что

$$\|w(s)\|^2+\|\nabla w(s)\|^2+\|\Delta w_1(s)\|^2\le$$

$$\le c_\varepsilon\int_0^s\|\Delta w_1(s)\|^2\,dV_b[0,t]\cdot\exp\left[cT+\int_0^T|\,a''(t)|dt\right].$$

Из последнего неравенства следует, что $w(s,x)=0,\ \ s\in[0,T],x\in\Omega$.

Рассмотрим частный случай, для которого выполнены все условия 1^0-5^0 и $1', 3'$.

Пусть $n=1$, $p\ge 1$. Рассмотрим смешанную задачу для уравнения

$$u_{tt}-a(t)u_{ttxx}+b(t)u_{xxxx}+|u|^{p-1}u=f(t,x), \qquad (28)$$

$$u(t,0)=u(t,1)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,1)=0\ , \qquad (29)$$

$$u(0,x)=u_0(x),\qquad u_t(0,x)=u_1(x)\ \ , \qquad (30)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условиям 1^0, 2^0 и $f(t,x)\in W_2^1\left(0,T;\,\hat{W}_2^1\right)$.

Тогда выполнены все условия теоремы 1 и 2, поэтому задача (28) – (30) имеет единственное слабое решение

$$u(\cdot)\in W_2^1\left(0,T;\hat{W}_2^2,\ \hat{W}_2^1\right)\ .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев А.Б., Намазов И.Г. Глобальная разрешимость смешанной задачи для псевдогиперболических уравнений четвертого порядка с интегральной нелинейностью// Вестник БГУ, серия физ. мат. наук, 2002, №4, с. 111-119.

2. Aliev A.B., Suleymanov N.A. A mixed problem for some classes quasilinear Sobolev type equations // Transactions of National Academy of Sciences of Azerb., v. 24, 2004, №1, p.27-36.
3. Khudaverdiyev K.I., Azizbekov E.I. Investigation of generalized solution of one non self adjoint one dimensional mixed problem for a class of semilinear pseudohyperbolic equations of fourth order// Transactions of National Academy of Sciences of Azerb., v. 22, 2002, №1, p. 139-149.
4. L.De Simon and G.Torelli, Linear second order differential equations with discontinuous coefficients in Hilbert spaces // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, v.4, 1974, №1, p. 131-154.
5. Aliev A.B., Jabrailova G.D. (G.D.Shukurova), Quasilinear hyperbolic equations with discontinuous coefficients // Transactions of National Academy of Sciences of Azerb., v. 26, 2006, №1, p.15-23.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.Ф. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972, 496 с.
7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
8. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.

ƏMSALI HAMAR OLMAYAN DÖRDTƏRTİBLİ YARIMXƏTTİ PSEVDOHİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QARIŞIQ MƏSƏLƏ

G.D.ŞÜKÜROVA (CƏBRAYILOVA)

XÜLASƏ

İşdə bəzi əmsalları məhdud variasiyalı, bəziləri isə hamar olduqda dördtərtibli yarımxətti psevdohiperbolik tənliklər üçün qarışıq məsələyə baxılmış, zəif həllin tərifi verilmişdir. Baxılan məsələnin zəif həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat olunmuşdur.

MIXED PROBLEM FOR THE FORTH ORDER POLYLINEAR PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS WITH NONSMOOTH COEFFICIENT

GULNARA D.SHUKUROVA (JABRAYILOVA)

SUMMARY

The paper deals with the mixed problem for the forth order polylinear pseudohyperbolic equations when some coefficients are of sufficiently smooth functions, while others have bounded variations. The definition of the weak solution is introduced. The theorems of existence and uniqueness of the weak solution of the mixed problem are proved.